PROVA MODELO - MATEMÁTICA A *Matematicando* (www.amatoso.org)

Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Fonte: IAVE

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto do qual se sabe que:

- a base do cone está contida no plano α de equação $2x+3y+6z=8$;
- o centro da base do cone é o ponto A de coordenadas $(1,2,0)$;
- o ponto B de coordenadas $(1,0,1)$ pertence à circunferência que limita a base do cone;
- o volume do cone é igual a $\frac{35\pi}{3}$;
- o vértice V pertence ao primeiro octante.

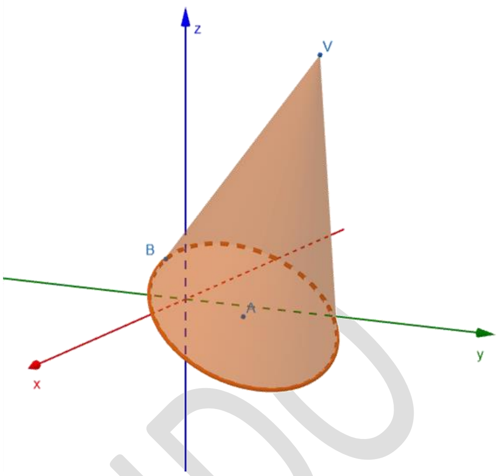

Figura 1

✱ **1.1.** Determine as coordenadas do ponto V.

✱ **1.2.** Qual das seguintes equações define o plano β que é perpendicular ao plano α e contém a reta AB?

(A) $-6y+3z=0$ **(B)** $15x-2y-4z=0$

(C) $-6x+2z+2=0$ **(D)** $15x-2y-4z-11=0$

2. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$ e o ponto B tem coordenadas $(0,1)$;
- C é um ponto da circunferência e D é a sua projeção ortogonal no eixo Oy;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[\right)$.

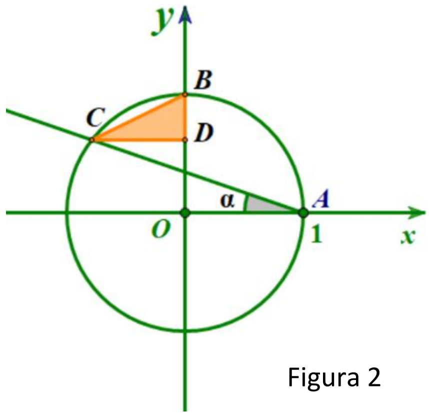

Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[BCD]$ pode ser dada, em função de α, por

$\frac{\cos(2\alpha)}{2}-\frac{sen(4\alpha)}{4}$.

3. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 3, três algarismos 5 e dois algarismos 8.

Um número nestas condições é, por exemplo:

3 5 5 8 0 5 8

Escolhe-se ao acaso um desses números.

Determine a probabilidade de o número escolhido ser menor do que cinco milhões, sabendo que é ímpar. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **4.** Sendo n e p dois números naturais maiores do que um tais que $p+1<n$, considere a expressão

${}^{n+1}C_p + 2\times {}^{n+1}C_{p+1} + {}^{n+1}C_{p+2}$.

Qual das seguintes expressões tem o mesmo valor que a expressão dada para quaisquer valores de n e p ?

(A) ${}^{n+3}C_{p+1}$ **(B)** $2\times {}^{n+2}C_{p+1}$ **(C)** $2\times {}^{n+1}C_{p+1}$ **(D)** ${}^{n+3}C_{p+2}$

* **5.** Dos alunos do 12.º ano de uma escola, sabe-se que:

- 60% compraram um bilhete para o *Rock in Rio* ;
- dos que compraram bilhete para o *Rock in Rio*, um terço são raparigas;
- um em cada quatro rapazes não comprou bilhete.

Determine a probabilidade de, escolhendo ao acaso um aluno do 12.º ano dessa escola, esse aluno ser uma rapariga e não ter comprado bilhete para o *Rock in Rio*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões de números reais e k um número natural.

Sabe-se que:

- (u_n) é uma progressão geométrica monótona da qual se sabe que $u_1 = 3$ e $u_5 = 27$;
- $v_n = \log_9(u_n)$;
- a soma dos k primeiros termos da sucessão (v_n) é igual a $\frac{85}{2}$.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine o valor de k .

Pode recorrer à calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

✱ 7. Na Figura 3, está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

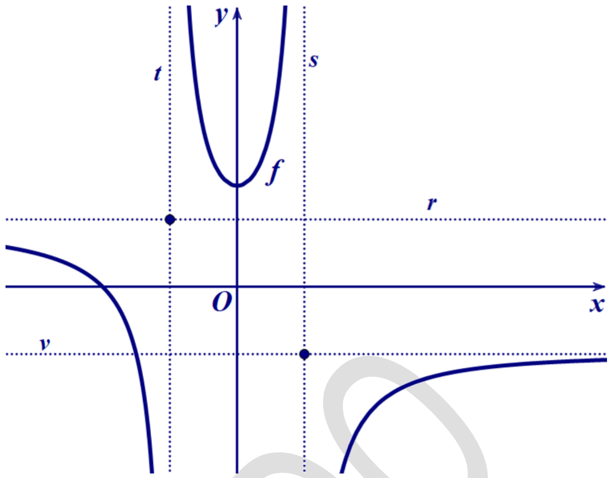

Figura 3

As retas r, s, t e v, de equações $y=1$, $x=1$, $x=-1$ e $y=-1$, respetivamente, são as assíntotas ao gráfico da função f.

Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n^2+1}}$.

A que é igual $\lim f(a_n)$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

✱ 8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}$.

Sabe-se que w_1 é uma das raízes de ordem 5 de um certo número complexo z.

Seja w_2 a raiz quinta de z que pertence ao terceiro quadrante.

A qual dos conjuntos seguintes pertence w_2?

(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ **(B)** $\{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 2\}$

(C) $\{z \in \mathbb{C} : |z+2| \ge |z+2i|\}$ **(D)** $\left\{z \in \mathbb{C} : -\pi < Arg(z) < -\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2, tais que:

$$z_1 = \overline{\left(i+\sqrt{3}\right)} \times i^{47} \quad \text{e} \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

Considere $w = \dfrac{z_1}{-i \times z_2}$.

Mostre que $|w+1|^2 = 5 + 2\sqrt{2}$.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

10. Seja k um número real.

Considere a função, g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-2x+1}{-2x^2+6x-4} & se \quad x<1 \\ k & se \quad x=1 \\ \dfrac{sen(2\pi x)}{1-\sqrt{x}} & se \quad x>1 \end{cases}$.

✱ **10.1.** Averigue, por processos analíticos e sem recorrer à calculadora, se existe algum valor de k para o qual a função g seja contínua em $x=1$.

✱ **10.2.** Seja $a\in\left]0,1\right[$.

Considere:

- os pontos A e B, pertencentes ao gráfico de g, de abcissas a e $-a$, respetivamente;
- os pontos C e D, projeções ortogonais dos pontos A e B no eixo Ox.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de a sabendo que o quadrilátero $[ABDC]$ tem área $\frac{1}{4}$.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

11. Sem recorrer à calculadora, resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação.

$$\ln\left(2-e^x\right)-2x\leq 0.$$

12. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+2} & se \quad x>-1 \\ x+(x+1)^2 e^{x+1} & se \quad x\leq -1 \end{cases}$.

Resolva as alíneas seguintes por processos analíticos, sem recorrer à calculadora.

✱ **12.1.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

✱ **12.2.** Determine a abcissa do ponto, de abcissa pertencente ao intervalo $]-\infty,-1[$, no qual a reta tangente ao gráfico de f tem declive mínimo.

12.3. Mostre que existe, pelo menos, um ponto pertencente ao gráfico de f, com abcissa pertencente ao intervalo $]2,3[$, cuja ordenada excede o simétrico da abcissa em 3 unidades.

✱**13.** Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função real de variável real f e a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 2.

Como a figura sugere, a reta t interseta o gráfico de f no ponto $B\left(5,\dfrac{17}{4}\right)$ e interseta o eixo das ordenadas no ponto $C(0,2)$.

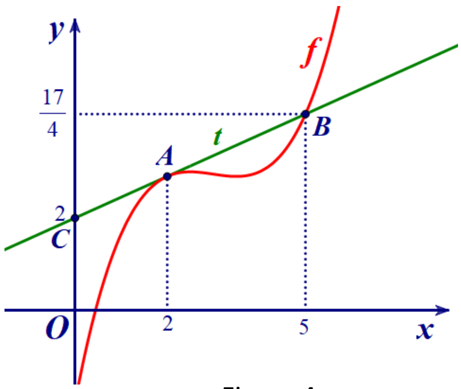

Figura 4

Considere ainda a função, real de variável real, g, da qual se sabe que:

- $g(1)=2$;
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\dfrac{10}{9}$.

Qual é o valor de $(f\circ g)'(1)$?

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{8}$ **(D)** $\dfrac{1}{9}$

✱ 14. Na Figura 5, estão representadas, num referencial o.n. xOy, as retas r e s e os pontos A e B, pertencentes, respetivamente, às retas r e s.

Está também representada a reta t, que contém a bissetriz do ângulo AOB.

Sabe-se que a reta r é definida pela equação $y = x$ e a reta s é definida pela equação $y = 4x$.

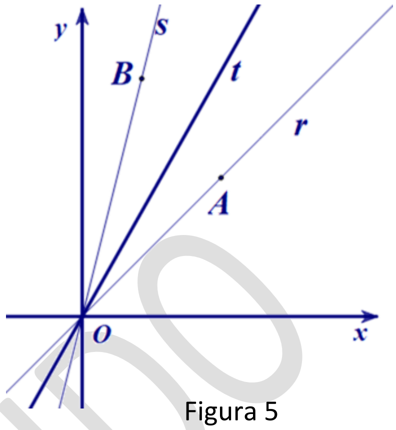

Figura 5

Determine o **valor exato** do declive da reta t.

Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b} + c$, com $a, c \in \mathbb{Q}^+$ e $b \in \mathbb{N}$.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1	1.2	4.	5.	7.	8.	10.1	10.2	12.1	12.2	13.	14.	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	12	12	14	12	12	14	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.		3.		6.		9.		11.		12.3		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	6 x 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**