FICHA DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA A ***Matematicando*** (www.amatoso.org)

Duração: 120 min. (tolerância: 10 min.)

Data: 19.05.2022

12.º Ano

Nome: ____ **N.º** _____

Classificação: ______________________________ **O professor:** ______________________

Utilize apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, indique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado do teste.

O formulário encontra-se na página 2.

É permitido o uso de calculadora em *modo teste.*

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \, e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

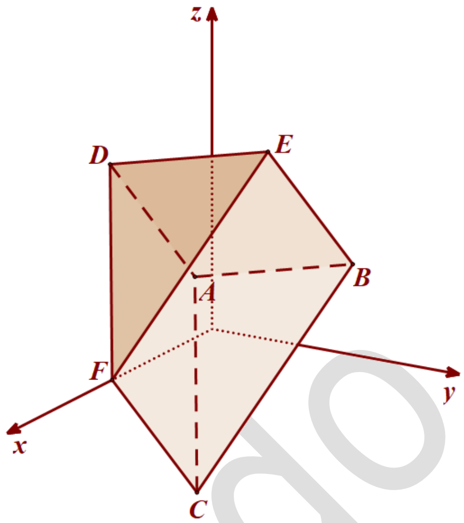
$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[ABCDEF]$.



1.1. Dispõe-se de **oito** cores diferentes para colorir as cinco faces do prisma.

Cada face do prisma vai ser colorida com uma única cor.

Sabe-se que o prisma deve ser pintado de forma que exatamente duas faces sejam pintadas da mesma cor, e as restantes três faces sejam pintadas com cores diferentes entre si.

De quantas formas diferentes se pode pintar o prisma?

1.2. Considere que se escolhem ao acaso dois vértices do prisma.

Qual é a probabilidade de esses dois vértices definirem uma reta contida no plano FEB?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{4}{15}$

1.3. Sabe-se que:

- $DEF: x+z-6=0$;
- os pontos A e E têm coordenadas $(-4,-3,0)$ e $(0,2,6)$, respetivamente;
- o ponto F pertence ao eixo Ox.

Determine, em graus, a amplitude do ângulo FDE.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sugestão: Comece por determinar as coordenadas do ponto D.

2. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos possíveis tais que $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Sabe-se que:

- $2P(A) - 3 \times P(B) = 0$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{6} P(A)$

Qual é o valor de $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

3. Considere a função contínua, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2 e^{\frac{1}{x}} & se \quad x>0 \\ \dfrac{\ln(-x+1)}{x-1} & se \quad x<0 \end{cases}$.

3.1. Resolva as três alíneas seguintes **sem recorrer à calculadora**.

3.1.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

3.1.2. Estude, no intervalo $]-\infty,0[$, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

3.1.3. Existe uma reta horizontal tangente ao gráfico de f num ponto pertencente ao quarto quadrante. Determine a sua equação reduzida.

3.2. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = n^2 \times f\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

Podemos afirmar que:

(A) (u_n) é uma progressão aritmética de razão e.

(B) (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\sqrt{e}$.

(C) (u_n) é uma progressão geométrica de razão e.

(D) (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{e}$.

4. Sejam a e b dois números reais positivos diferentes de 1.

Sabendo que $a^5=3$ e $\log_b a = \dfrac{3}{5}$, qual é o valor exato de $\log_a(3b)$?

(A) $\dfrac{20}{3}$ **(B)** $\dfrac{14}{3}$ **(C)** $\dfrac{22}{5}$ **(D)** $\dfrac{12}{5}$

5. **Sem recorrer à calculadora**, determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+3) < 2 - \log_2(2-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(3x)}{-3x+\pi} & se \quad x<\dfrac{\pi}{3} \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) & se \quad x\geq\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

Resolva as alíneas seguintes **sem recorrer à calculadora** a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

6.1. Estude a continuidade da função g em $x=\dfrac{\pi}{3}$.

6.2. Qual das seguintes expressões é a expressão geral dos zeros da função g pertencentes ao intervalo $\left[\dfrac{\pi}{3},+\infty\right[$?

(A) $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}_0^+$

(B) $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}_0^+$

(C) $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}_0^+$

(D) $x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}_0^+$

6.3. Considere $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Sabendo que $\cos(\alpha)=\dfrac{1}{5}$, determine o valor exato de $g(\alpha)$.

6.4. Mostre que a equação $g(x)=-\dfrac{1}{5}$ tem, pelo menos, uma solução, no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{12},-\dfrac{\pi}{9}\right[$.

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos $z=1-3i$ e $w=-2-i$.

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{z^2-3i^{67}+\operatorname{Im}\ w}{1+\overline{w}}$ e apresente o resultado na forma algébrica.

FIM

Cotações

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1	**1.2**	**1.3**	**2.**	**3.1.1**	**3.1.2**	**3.1.3**	**3.2**	**4.**	**5.**	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**7.**	**Total**
15	**8**	18	**8**	18	18	15	**8**	**8**	16	15	**8**	15	12	18	**200**