PROPOSTA DE CORREÇÃO

12.º Ano

1.

1.1. ${}^5C_2 \times 8 \times {}^7C_3 \times 3! = 16800$ ou ${}^5C_2 \times 8 \times {}^7A_3 = 16800$

1.2. $P(\text{"os pontos escolhidos definem uma reta pertencente ao plano FEB"}) = \dfrac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

__Resposta:__ **(A)**

1.3. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto F e do ponto D.

O ponto F pertence ao eixo Ox, logo as suas coordenadas são do tipo $(x,0,0)$. Como é também um ponto do plano DEF, vem que: $x+0-6=0 \Leftrightarrow x=6$. Assim, $F(6,0,0)$.

Como a reta AD é perpendicular ao plano DEF, vem que pode ser definida pela equação

$AD: (x,y,z) = (-4,-3,0) + k(1,0,1),\ k \in \mathbb{R}$

(Note que o ponto D é o ponto de interseção da reta AD com o plano DEF).

$$\begin{cases} x=-4+k \\ y=-3 \\ z=k \\ x+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ ---- \\ ---- \\ -4+k+k-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4+5 \\ y=-3 \\ z=5 \\ k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=5 \\ ---- \end{cases} \qquad D(1,-3,5)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{DF}\,\hat{}\,\overrightarrow{DE}\right) = \frac{\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}}{\left\|\overrightarrow{DF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{5}{\sqrt{59}\times\sqrt{27}} = \frac{5}{\sqrt{1593}}$$

$$\overrightarrow{DF}\,\hat{}\,\overrightarrow{DE} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{1593}}\right) \approx 82{,}8^{\circ}$$

Cálculos Auxiliares:

$\overrightarrow{DF} = F - D = (6,0,0)-(1,-3,5) = (5,3,-5)$ $\qquad \left\|\overrightarrow{DF}\right\| = \sqrt{5^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{59}$

$\overrightarrow{DE} = E - D = (0,2,6)-(1,-3,5) = (-1,5,1)$ $\qquad \left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \sqrt{1^2+5^2+1^2} = \sqrt{27}$

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE} = (5,3,-5)\cdot(-1,5,1) = -5+15-5 = 5$

2.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\times P(B)\right)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{12}\times P(B)}{P(B)}=\frac{1}{4}$$

Cálculos Auxiliares: $2P(A)-3\times P(B)=0\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{2}\times P(B)$

<u>Resposta:</u> (D)

3. $f(x)=\begin{cases} -x^2 e^{\frac{1}{x}} & se \quad x>0 \\ \dfrac{\ln(-x+1)}{x-1} & se \quad x<0 \end{cases}$.

3.1.

3.1.1. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

<u>Assíntotas verticais</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)=0\times\infty\ (Ind)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)=-\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{(1)}{=}-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}}_{\text{lim.not.}}=-(+\infty)=-\infty$$

(1) Mudança de variável: Seja $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$. Se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$.

Portanto, a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f.

Não existem mais assíntotas verticais uma vez que f é contínua no seu domínio que é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

<u>Assíntotas não verticais</u>:

Quando $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x+1)}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}(Ind)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x+1)}{x-1}\overset{(2)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{-y+1-1}=-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{lim.not.}}=-0=0$$

(2) Mudança de variável: Seja $y=-x+1\Leftrightarrow x=-y+1$. Se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$

Portanto a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$

Quando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{\frac{1}{x}}\right) = -(+\infty)\times e^{\frac{1}{+\infty}} = -(+\infty)\times e^0 = -\infty$$

O gráfico de f não tem quaisquer assíntotas não verticais, quando $x \to +\infty$.

<u>Conclusão</u>: O gráfico de f admite uma assíntota vertical de equação $x=0$ e uma assíntota horizontal de equação $y=0$, quando $x \to -\infty$

3.1.2. No intervalo $]-\infty,0[$, $f(x) = \dfrac{\ln(-x+1)}{x-1}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(-x+1)}{x-1}\right)' = \frac{(\ln(-x+1))' \times (x-1) - \ln(-x+1)\times(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{\frac{(-x+1)'}{-x+1}\times(x-1) - \ln(-x+1)\times 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{-x+1}\times(x-1) - \ln(-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{x-1}}\times\cancel{(x-1)} - \ln(-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1-\ln(-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(-x+1)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(-x+1)=0 \wedge \underbrace{(x-1)^2 \neq 0}_{Cond.Univ.} \Leftrightarrow \ln(-x+1)=1 \Leftrightarrow -x+1=e \Leftrightarrow x=1-e$$

x	$-\infty$	$1-e$		0
$1-\ln(-x+1)$	$-$	0	$+$	$n.d.$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$n.d.$
Zeros e sinal de f'	$-$	0	$+$	$n.d.$
Variação e extremos de f	$\searrow$	$f(1-e)$	$\nearrow$	$n.d.$

f é decrescente em $]-\infty,1-e]$ e é decrescente em $[1-e,0[$.

$f(1-e) = \dfrac{\ln(-(1-e)+1)}{1-e-1} = \dfrac{\ln(-1+e+1)}{-e} = -\dfrac{1}{e}$ é o mínimo relativo da função no intervalo considerado.

3.1.3. Seja $P(x, f(x))$ um ponto do gráfico de f .

Se o ponto P pertence ao quarto quadrante, então $x>0$, logo $f(x) = -x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Uma vez que a reta tangente ao gráfico de f no ponto P é horizontal, $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\left(-x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(-x^2\right)'\times e^{\frac{1}{x}}+\left(-x^2\right)\times\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=-2x\times e^{\frac{1}{x}}-x^2\times\left(\frac{1}{x}\right)'\times e^{\frac{1}{x}}=-2x\times e^{\frac{1}{x}}-\cancel{x^2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\times e^{\frac{1}{x}}=$$

$$=-2x\times e^{\frac{1}{x}}+1\times e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\times(-2x+1)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\times(-2x+1)=0\Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{1}{x}}=0}_{eq.imp.}\vee -2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Ponto de tangência: $P\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\to P\left(\frac{1}{2},\frac{-e^2}{4}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{4}e^2=\frac{-e^2}{4}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente é do tipo $y=0x+b$. Como $P\in$ reta, tem-se $y=\frac{-e^2}{4}$.

3.2. $u_n=n^2\times f\left(\frac{2}{n}\right)$.

Como $u_n=\frac{2}{n}\to 0^+$, então $f\left(\frac{2}{n}\right)=-\left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{\frac{1}{\frac{2}{n}}}=-\frac{4}{n^2}e^{\frac{n}{2}}$

Portanto $u_n=n^2\times f\left(\frac{2}{n}\right)=\cancel{n^2}\times\left(-\frac{4}{\cancel{n^2}}e^{\frac{n}{2}}\right)=-4\times e^{\frac{n}{2}}$.

Vejamos se a sucessão de termo geral $u_n=-4\times e^{\frac{n}{2}}$ é uma progressão geométrica:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{-4\times e^{\frac{n+1}{2}}}{-4\times e^{\frac{n}{2}}}=\frac{\cancel{-4}\times e^{\frac{n+1}{2}}}{\cancel{-4}\times e^{\frac{n}{2}}}=e^{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Concluímos que a sucessão é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{e}$.

<u>**Resposta:**</u> **(D)**

4. Sabemos que $a^5 = 3$ e $\log_b a = \frac{3}{5}$.

$$\log_a(3b) = \log_a(3) + \log_a(b) = \log_a(a^5) + \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = 5 + \frac{1}{\frac{3}{5}} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$$

__Resposta:__ **(A)**

5. $\log_2(x+3) < 2 - \log_2(2-x)$

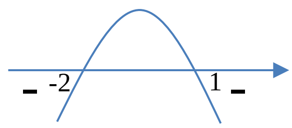
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{x+3>0}_{x>-3} \wedge \underbrace{2-x>0}_{x<2} \right\} =]-3,2[$$

$$\begin{aligned}
&\log_2(x+3) < 2 - \log_2(2-x) \\
&\Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2(2-x) < 2 \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow \log_2\left((x+3)\times(2-x)\right) < 2 \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow \log_2\left(-x^2 - x + 6\right) < 2 \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow \log_2\left(-x^2 - x + 6\right) < \log_2\left(2^2\right) \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 < 2^2 \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow -x^2 - x + 2 < 0 \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow x \in \left(]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[\right) \wedge x \in D \\
&\Leftrightarrow x \in]-3,-2[\cup]1,2[
\end{aligned}$$

C. A.

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)\times 2}}{2(-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$



6. .

6.1. g é contínua em $x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} g(x) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

- $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \frac{sen(3x)}{-3x+\pi}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =^{(3)} \lim_{y \to 0^-} \frac{sen\left(3\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{-3\left(y+\frac{\pi}{3}\right)+\pi} = \lim_{y \to 0^-} \frac{sen(3y+\pi)}{-3y-\pi+\pi} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{-sen(3y)}{-3y} = \lim_{3y \to 0^-} \frac{sen(3y)}{3y} = 1$$

$^{(3)}$ Mudança de variável: Seja $y = x - \frac{\pi}{3}$. Tem-se $x = y + \frac{\pi}{3}$ e se $x \to \frac{\pi}{3}^-$, então $y \to 0^-$.

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) = 1$
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) = 1$

g é contínua em $x=\frac{\pi}{3}$, pois $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} g(x) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6.2. No intervalo $\left[\frac{\pi}{3},+\infty\right[$, $g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[\frac{\pi}{3},+\infty\right[$, a expressão geral dos zeros é: $\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}_0^+$

<u>Resposta:</u> (D)

6.3.

$\alpha\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, então $g(\alpha)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+sen\alpha\times sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\times\frac{1}{2}+sen\alpha\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Como $\cos(\alpha)=\frac{1}{5}$, usando a fórmula fundamental da trigonometria, vem

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow sen^2\alpha+\left(\frac{1}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow sen^2\alpha=1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow sen^2\alpha=\frac{24}{25} \Leftrightarrow sen\alpha=\pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow sen\alpha=\pm\frac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow sen\alpha=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, $sen\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Assim, (1) $\cos\alpha\times\frac{1}{2}+sen\alpha\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+2\sqrt{18}}{10}=\frac{1+2\times3\sqrt{2}}{10}=\frac{1+6\sqrt{2}}{10}$

6.4.

Como $x\in\left]-\frac{\pi}{12},-\frac{\pi}{9}\right[$, $g(x)=\frac{sen(3x)}{3x-\pi}$

I - g é contínua em $\left]-\infty,\frac{\pi}{3}\right[$, por se tratar do quociente de funções contínuas, logo em particular é contínua em $\left[-\frac{\pi}{12},-\frac{\pi}{9}\right]$.

II - $g\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{sen\left(3\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}{-3\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\pi}=\frac{sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}+\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5\pi}{4}}=-\frac{2\sqrt{2}}{5\pi}>-\frac{1}{5}$

$g\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\frac{sen\left(3\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)}{-3\left(-\frac{\pi}{9}\right)+\pi}=\frac{sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}+\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4\pi}{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}<-\frac{1}{5}$

Logo, $g\left(-\frac{\pi}{9}\right)<-\frac{1}{5}<g\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Por **I** e **II** e recorrendo ao Teorema de Bolzano, podemos afirmar que $\exists x\in\left]-\frac{\pi}{12},-\frac{\pi}{9}\right[:g\left(x\right)=-\frac{1}{5}$, ou seja, a equação $g(x)=-\frac{1}{5}$ tem, pelo menos, uma solução, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{12},-\frac{\pi}{9}\right[$.

7.

$$\frac{z^2-3i^{67}+\operatorname{Im}(w)}{1+\overline{w}}=\frac{(1-3i)^2-3i^{67}+\operatorname{Im}(-2-i)}{1+\overline{(-2-i)}}=\frac{-8-6i-3(-i)+(-1)}{1+(-2+i)}=\frac{-8-6i+3i-1}{-1+i}=\frac{-9-3i}{-1+i}=$$

$$=\frac{(-9-3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{9+9i+3i-3}{1+1}=\frac{6+12i}{2}=3+6i$$

Cálculos auxiliares:

$i^{67}=i^{4\times16+3}=\left(i^4\right)^{16}\times i^3=-i$

$(1-3i)^2=1^2-2\times1\times3i+(3i)^2=1-6i-9=-8-6i$