Proposta de Correção da Ficha de Avaliação 12ºB 7 Dezembro 2011

Grupo I

1. Uma vez que não conhecemos qual a ordem do termo pedido, suponhamos que tem ordem p+1.

$$T_{p+1}={}^{8}C_p \times \left(x^2\right)^{8-p} \times \left(-\frac{1}{x}\right)^p \Leftrightarrow T_{p+1}={}^{8}C_p \times x^{16-2p} \times (-1)^p \times x^{-p} \Leftrightarrow$$

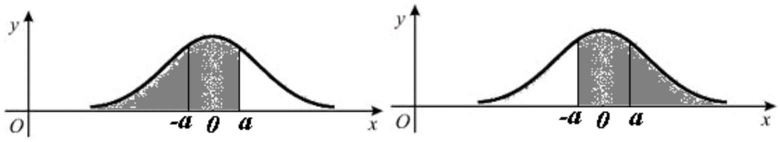
$$T_{p+1}={}^{8}C_p \times (-1)^p \times x^{16-3p}$$

Uma vez que pretendemos que o **grau** do termo seja 7, igualamos o **expoente da variável** a 7 e determinamos p.

$$16-3p=7 \Leftrightarrow -3p=7-16 \Leftrightarrow -3p=-9 \Leftrightarrow p=3$$

Então o coeficiente do termo pedido é ${}^{8}C_3 \times (-1)^3 = -56$ (Teste)

2. Uma vez que se trata de uma distribuição normal devemos começar por esboçar uma curva que possa representar essa distribuição e representar cada uma das probabilidades referidas nas opções.



Observando as figuras, facilmente se conclui que, devido à **simetria da curva**, $P(X \le a) = P(X \ge -a)$. (Exame)

3. Atendendo à propriedade, demonstrada na aula:

" Sendo A e B dois acontecimentos possíveis, se A e B são independentes, então A e B não são incompatíveis."

Que, pela lei da conversão, se pode apresentar como:

" Sendo A e B dois acontecimentos possíveis, se A e B são incompatíveis, então A e B não são independentes."

Concluímos que:

I. Se X e Y são acontecimentos independentes, então são incompatíveis **Falso**

III. Se X e Y são acontecimentos independentes então não são contrários. **Verdadeiro**

Atendendo à definição de acontecimentos contrários concluímos que:

II. Se X e Y são acontecimentos contrários então são incompatíveis. **Verdadeiro**

Portanto a resposta certa é:

As afirmações II e III são verdadeiras e I é falsa. (Teste)

4. Trata-se de uma distribuição binomial $B\left(15,\frac{1}{6}\right)$ e a variável considerada é

X: " n.º de vezes que sai a face 4 em 15 lançamentos do dado"

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{15}-{}^{15}C_1\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{14}=1-{}^{15}C_0\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^{15}-{}^{15}C_1\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

A probabilidade indicada é $1-P(X=0)-P(X=1)$ ou seja

$1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-P(X\le 1)=P(X\ge 2)$ que pode ser traduzida como a probabilidade de "a face 4 sai pelo menos duas vezes". (Exame)

5. Das transformações indicadas, apenas uma não altera o contradomínio, por se tratar de uma simetria relativamente ao eixo Oy. $g(x)=f(-x)$

Grupo II

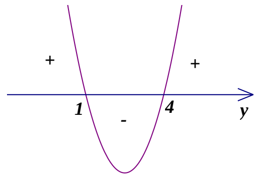
1. $2^x + 2^{2-x} \leq 5 \Leftrightarrow 2^x + 2^2 \times 2^{-x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x + 4 \times \dfrac{1}{2^x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x + \dfrac{4}{2^x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5 \times 2^x + 4 \leq 0$

Fazendo uma mudança de variável, obtemos a inequação, $y^2 - 5y + 4 \leq 0$

Para resolver esta inequação do segundo grau é necessário determinar os zeros da função quadrática associada e fazer um estudo do seu sinal.

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = 1$



Então $y^2 - 5y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \wedge y \leq 4$

Voltando à variável inicial, concluímos que,

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5 \times 2^x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq 1 \wedge 2^x \leq 4 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^0 \wedge 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 4$

$C.S = [0,4]$ (Resolvido no manual, pág.135)

2. **2.1** Se a semivida da substância é 1612 anos, sabemos que passados 1612 anos, a quantidade inicial de substância, designada por a, se reduziu a metade. Podemos então escrever a equação:

$$m(1612) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = a\,e^{b \times 1612} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{a} = e^{1612b} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{1612b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1612b \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1612}$$

Então $b \approx -0{,}43$, arredondando o valor obtido às centésimas.

2.2.1 Notar que, de acordo com a unidade indicada para a variável independente (t), nesta alínea t=1. Sendo assim é sugerida a equação:

$$m(1) = 1{,}50 \Leftrightarrow 1{,}50 = ae^{-0{,}43 \times 1} \Leftrightarrow a = \frac{1{,}50}{e^{-0{,}43}}$$

Então $a \approx 2{,}31$, arredondando o valor obtido às centésimas.

2.2.2 Se a quantidade inicial, a, se vai reduzir a 10%, passados t anos existe $0{,}1a$.

Resolvemos então a equação:

$$0{,}1a = ae^{-0{,}43t} \Leftrightarrow \frac{0{,}1a}{a} = e^{-0{,}43t} \Leftrightarrow 0{,}1 = e^{-0{,}43t} \Leftrightarrow \ln(0{,}1) = -0{,}43t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}43}$$

Obtemos então $t \approx 5{,}355\ milénios$ o que corresponde a, aproximadamente, 5355 anos.

3.

3.1 Consideremos os acontecimentos:

L: «o funcionário é licenciado» e I:«o funcionário tem idade inferior a 40 anos»

A probabilidade pedida é $P\left(L / \bar{I}\right) = \dfrac{P\left(L \cap \bar{I}\right)}{P\left(\bar{I}\right)} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}9} = \dfrac{1}{4}$. (Exame)

3.2 O n.º de maneiras diferentes de se colocarem para a fotografia é dado por $10! \times 2^{10}$

10! é o n.º de maneiras de trocar entre si os 10 casais (notar que é indiferente se estão em duas filas de 5 casais ou numa só fila de 10 casais).

Para cada uma destas 10! maneiras de os casais se disporem, há 2^{10} maneiras de os elementos dos casais trocarem de lugar entre si.

3.3 Uma vez que o número deve ter exatamente três algarismos 2, devemos contar separadamente os casos em que o primeiro algarismo do número é 2 e aqueles em que o primeiro algarismo do n.º não é 2 (podendo então ser qualquer algarismo diferente de 2 e de zero).

Suponhamos que o primeiro algarismo é 2. Há 9 hipóteses (0,1,3,4,5,6,7,8,9) para cada um dos algarismos do número que são diferentes de 2.Uma das possibilidades é:

$$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$$

e, como há ${}^5C_2$ maneiras de escolher 2 lugares, entre os 5 possíveis, para os restantes algarismos 2, o n.º de números deste tipo são ${}^5C_2 \times 1\times 1\times 1\times 9^3 = 7290$.

Supondo que o algarismo 2 não é o primeiro algarismo do número, existem 8 hipóteses para o primeiro algarismo (1,3,4,5,6,7,8,e,9) e 9 hipóteses para os dois restantes algarismos (0,1,3,4,5,6,7,8,9).
Uma das possibilidades é

$$\boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}$$

e, como há ${}^5C_3$ maneiras de escolher 3 lugares, entre os 5 possíveis, para os restantes algarismos 2, o n.º de números deste tipo são

$${}^5C_3 \times 8\times 1\times 1\times 1\times 9\times 9 = 6480$$

Uma vez que os conjuntos referidos são incompatíveis, o n.º de casos possíveis para esta experiência é dado por:

$${}^5C_2 \times 1\times 1\times 1\times 9^3 + 8\times 1\times 1\times 1\times {}^5C_3 = 7290 + 6480 = 13770\,.$$

O n.º de casos favoráveis é, obviamente, 20, pois os participantes compraram, cada um, um bilhete.

Sendo assim a probabilidade pedida é dada por: $\dfrac{20}{13770} = \dfrac{2}{1377}$

3.4 A resposta correta é II.

Para satisfazer o pedido podemos escolher dois funcionários a favor e um contra, ou três funcionários a favor.

O número de maneiras de escolher 2 funcionários a favor é dado por ${}^9C_2$, uma vez que não interessa a ordem pela qual se escolhem os funcionários e, para cada uma destas maneiras, há ${}^6C_1$ maneiras de escolher o funcionário contra. Sendo assim há ${}^9C_2 \times {}^6C_1$ maneiras de escolher 2 funcionários a favor e um contra.

O número de maneiras de escolher 3 funcionários a favor é dado por ${}^9C_3$. Como são situações incompatíveis, adicionando os dois números referidos obtemos o n.º de maneiras de escolher um grupo formado por dois funcionários em que pelo menos dois deles estão a favor do novo horário.

A resposta I baseia-se no seguinte raciocínio:

Ao n.º total de maneiras de escolher 3 funcionários, dado por ${}^{15}C_3$, retiramos os casos que não nos interessam, que são aqueles em que escolhemos 3 funcionários contra, e que são ${}^{6}C_3$, e aqueles em que escolhemos 2 funcionários contra e um a favor, e que são ${}^{6}C_2 \times {}^{9}C_1$. Ora na resposta apresentada faltou subtrair este último número.

A resposta correta é ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3 - {}^{6}C_2 \times {}^{9}C_1$. (Exame)

4. Os valores da variável aleatória são 1,2, 3 e 4.

Notar que: $A = \{1,3\}$ e $B = \{3,5\}$

- $A \cap B = \{3\}$ e $P(A \cap B) = 0,4$, logo $P(X = 3) = 0,4$
- $P(A) = P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0,5$
- $P(A) = 0,5 \Leftrightarrow P(X = 1) + P(X = 3) = 0,5 \Leftrightarrow P(X = 1) = 0,5 - 0,4 \Leftrightarrow P(X = 1) = 0,1$
- $A \cup B = \{1,3,4\}$ e $P(A \cup B) = 0,8$, logo
  $P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,8 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow P(X = 4) = 0,8 - 0,1 - 0,3 \Leftrightarrow P(X = 4) = 0,3$
- $\overline{A \cup B} = \{2\}$ e $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,8 \Leftrightarrow P(X = 2) = 0,2$

A tabela de distribuição de probabilidades desta variável é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

(Teste Intermédio)