COLÉGIO PAULO VI
Departamento de Matemática

FICHA DE AVALIAÇÃO

Duração: 90 min| 27.05.2016

12º Ano

Utilize apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de material de desenho e de medição, assim como de uma calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, indique a numeração do grupo e do item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Para cada item, apresente apenas uma resposta.

O teste inclui um formulário na página 2.

As questões retiradas do Banco de Questões estão identificadas com a designação (**B.Q.**).

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado do teste.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta.
Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que o primeiro termo é igual a $\frac{1}{4}$ e que o quarto termo é igual a 2.

Qual é o décimo sétimo termo?

(A) 8196 **(B)** 16384 **(C)** 32768 **(D)** 65536

2. Seja a um número real.

Seja a função f, de domínio IR^+, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$.

Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(2,8)$.

Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f .

Qual é o valor de a?

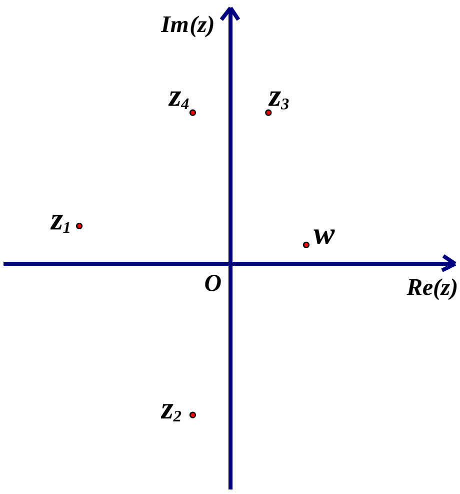
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

3. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right)$.

O número de zeros da função f, pertencentes ao intervalo $[0\,,2000\,[$, é:

(A) 2000 **(B)** 200 **(C)** 100 **(D)** 400

4. Na figura, estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual é o número complexo que pode ser igual a $-\overline{2iw}$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

5. Num saco encontram-se sete bolas com cores diferentes e indistinguíveis ao tato. As bolas encontram-se todas numeradas: três com o número 5 e quatro com o número 4.

Retiram-se sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Considere a variável aleatória X: "$soma\ dos\ números\ saídos\ nas\ duas\ bolas$"

Indique o valor de a tal que $P(X = a) = \frac{2}{7}$.

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. **(B.Q.)** Considere as funções f e g , de domínio IR , definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + sen\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & se\ x \neq 0 \\ e^k - 1 & se\ x = 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in IR$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1 Determine k de modo que a função g seja contínua.

1.2 Determine, em $]-2\pi\,,5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$.

2. Considere a função f, de domínio IR, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + ln(x+1)}{x+1} & se\ x > -1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x-1} & se\ x \leq -1 \end{cases}$$

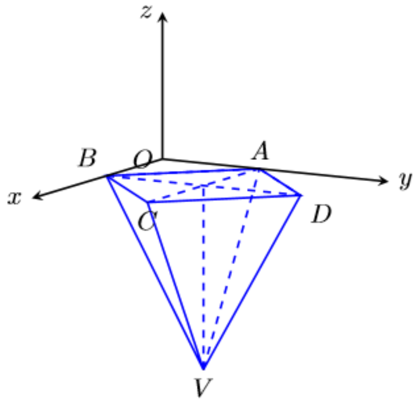
2.1. Estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]-1, +\infty[$ e, se existir, nesse intervalo, algum extremo relativo, determine-o.

2.2. O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota.

3. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular [ABCDV].

Sabe-se que:

- a base [ABCD] é um quadrado e está contida no plano xOy;
- o vértice A pertence ao eixo Oy e tem ordenada 2.
- o vértice B pertence ao eixo Ox;
- a ordenada do ponto A é igual à abcissa do ponto B;
- o vértice V é o centro da esfera $\mathcal{E}$ definida por $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 8z + 4 \leq 0$.



Defina, por uma condição cartesiana, o plano tangente à esfera $\mathcal{E}$ no ponto C.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Sabe-se que:

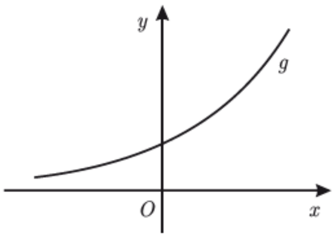
- $P(A) + 0{,}75P(B) = 1$
- $P(A|B) = 0{,}5$.

Aplicando as propriedades das probabilidades e os teoremas da Axiomática das probabilidades, determine o valor exato de $P\left((A \cup B)\middle|\bar{A}\right)$.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3 + i$ e $w = -1 + i$ (i *designa a unidade imaginária*).

Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\dfrac{z + \bar{w} - \left(\text{Re}(z) - \text{Im}(w)\right) \times i^{195}}{1 - i}$ é um número imaginário puro.

6. Na figura está representada, num referencial $o.n.xOy$, parte do gráfico da função g.

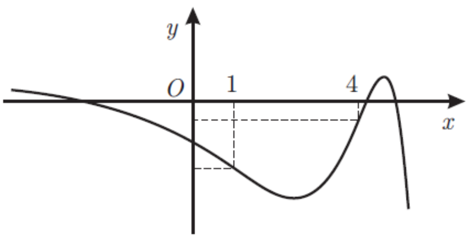


Sabe-se que:

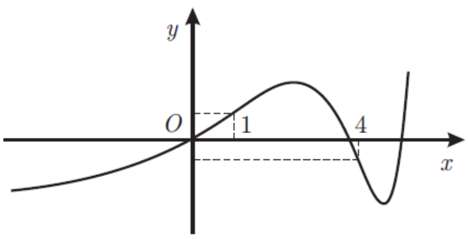
- g é uma função contínua em IR;
- g não tem zeros;
- a segunda derivada, f'', de uma certa função f tem domínio IR e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$;
- $f(1) \times f(4) > 0$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f.

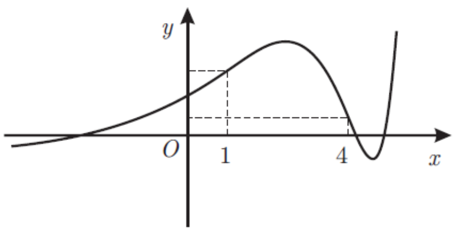
I



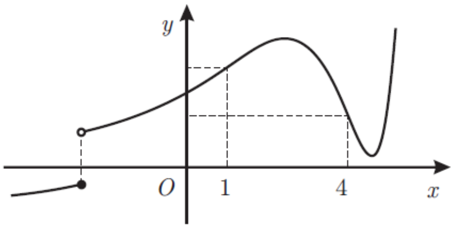
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- Indique a opção que pode representar f;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Nota: Pode realizar algum trabalho analítico.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ……………………….………. (5 x 8 pontos) ………..………..……… 40 pontos

Grupo II …..………………………………………………………..….…….…160 pontos

1. ………………………………………………………….40 pontos

1.1 …………………………………………20 pontos

1.2 …………………………………………20 pontos

2. ………………………………………………………….40 pontos

2.1 …………………………………………20 pontos

2.2 …………………………………………20 pontos

3. ………………………………………………………….20 pontos

4. …………………………………………………………. 20 pontos

5. …………………………………………………………. 20 pontos

6. …………………………………………………………. 20 pontos

Total ………………..…..……………..…………………………………………. 200 pontos