



**COLÉGIO PAULO VI**

---

Teste 2 (12ºB)

## **Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos | 7.12.2011

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

*O teste tem um formulário na página 3 e termina com a palavra **FIM**.*

## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Qual é o coeficiente de  $x^7$  no desenvolvimento  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$  ?

- (A) 28                      (B) 56                      (C) -56                      (D) -28

2. Seja  $a$  um número real positivo e seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Normal  $N(0,1)$ .

- (A)  $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$   
(B)  $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$   
(C)  $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$   
(D)  $P(X \leq a) = P(X > a)$

3. Sendo  $X$  e  $Y$  dois acontecimentos possíveis de uma dada experiência, considere as afirmações:

- I. Se  $X$  e  $Y$  são acontecimentos independentes, então são incompatíveis.  
II. Se  $X$  e  $Y$  são acontecimentos contrários então são incompatíveis.  
III. Se  $X$  e  $Y$  são acontecimentos independentes então não são contrários.

Podemos afirmar que:

- (A) As afirmações I e III são falsas e II é verdadeira.  
(B) As afirmações I e II são verdadeiras e III é falsa.  
(C) As afirmações II e III são falsas e I é verdadeira  
(D) As afirmações II e III são verdadeiras e I é falsa.

4. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado quinze vezes.

Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

- (A) A face 4 sai pelo menos uma vez.  
(B) A face 4 sai pelo menos duas vezes.  
(C) A face 4 sai no máximo uma vez.  
(D) A face 4 sai no máximo duas vezes.
5. Considere a função real de variável real definida por  $f(x) = 2^x + k$ , sendo  $k$  um número real.

Qual das seguintes funções tem contradomínio igual ao da função  $f$ ?

- (A)  $g(x) = f(x) + 1$   
(B)  $g(x) = 2f(x)$   
(C)  $g(x) = -f(x)$   
(D)  $g(x) = f(-x)$

## Formulário

### Probabilidades

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Sem recorrer à calculadora, resolva a seguinte inequação, apresentando o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

$$2^x + 2^{2-x} \leq 5$$

2. Quando uma substância radioativa se desintegra, a sua massa, medida em **gramas**, varia de acordo com uma função do tipo

$$m(t) = ae^{bt} \quad , \quad t \geq 0 \quad ,$$

Em que a variável  $t$  designa o tempo, medido em **milénios**, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real  $b$  depende da substância e a constante real  $a$  é a massa da substância no referido instante inicial.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

**Nota:** se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 2.1 A rapidez de desintegração é vulgarmente medida através do período de tempo que a quantidade inicial demora a reduzir-se a metade, vulgarmente designado por semivida da substância.

O rádio-226 é uma substância radioativa.

Admita que a semivida do rádio-226 é 1612 anos.

Prove que, para o rádio-226, **o valor da constante  $b$**  é, aproximadamente, -0,43.

- 2.2 Relativamente a uma certa quantidade inicial verificou-se que, **mil anos** depois de um certo instante inicial, era de 1,50g.

- 2.2.1 Determine um valor arredondado às centésimas dessa quantidade inicial.

- 2.2.2 Quantos anos terão de passar para que a quantidade inicial se reduza a 10%?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

3. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira.

3.1 Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:

- 60% são licenciados;
- dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
- dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao caso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.2 Os funcionários desta empresa costumam organizar um jantar de Natal e nessa ocasião tiram uma fotografia de grupo.

Este ano, talvez devido à crise, só vão, a esse jantar, 10 funcionários e respectivos cônjuges.

De quantas formas podem posar para a fotografia sabendo que se vão dispor em duas filas iguais e que os elementos de cada casal querem ficar lado a lado?



3.3 No restaurante onde se realiza o jantar vai ser sorteado **um** Cabaz de Natal.

O dono do restaurante, que gosta muito de probabilidades, fez uma brincadeira com o sorteio.

Os números a sorteio são **números de 6 algarismos**, com exatamente três algarismos 2.

Supondo que cada um dos 20 participantes comprou um bilhete, qual a probabilidade de que o Cabaz de Natal saia a um deles?

Apresente o resultado em fração irredutível.

**3.4** Considere agora o problema seguinte.

“ Foi pedido a 15 funcionários que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho.

Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos.

Escolhe-se, ao caso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?”

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I:  ${}^{15}C_3 - {}^6C_3$

Resposta II:  $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$

Apenas uma das respostas está correta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorreta, de modo a torna-la correta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

4. Efetua-se um único lançamento de um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4.

Considere que “número que sai” é o número que está na face voltada para baixo.

O dado não é equilibrado, pelo que os quatro números não têm a mesma probabilidade de sair.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A:” sair número ímpar”;

B:” sair número maior do que 2”.

Sabe-se que:

$$P(A \cap B) = 0,4 \qquad P(A) = P(\bar{A}) \qquad P(A \cup B) = 0,8$$

Seja X a variável aleatória «número saído no lançamento efetuado».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

Nota: apresente todas as justificações e todos os cálculos que efetuar na determinação dos valores das probabilidades.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I .....(5 x 10 pontos) ..... 50 pontos**

**Grupo II.....150 pontos**

**1. .... 20 pontos**

**2. .... 45 pontos**

**2.1 ..... 15 pontos**

**2.2 .....15 pontos**

**2.3 .....15 pontos**

**3. .... 70 pontos**

**3.1 ..... 20 pontos**

**3.2 ..... 15 pontos**

**3.3 ..... 15 pontos**

**3.4 ..... 20 pontos**

**4. .... 15 pontos**

**Total ..... 200 pontos**