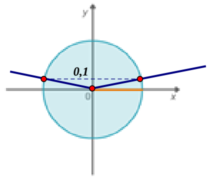
Ficha de Avaliação 28/11/2012 Proposta de Correcção V1

Grupo I



1. Representemos as soluções da equação no círculo trigonométrico:

Analisando os vários intervalos:

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Neste intervalo $-1 \le senx \le 1$ logo a equação tem pelo menos uma solução.

$\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ Neste intervalo $0 \le senx \le \frac{1}{2}$ logo a equação tem pelo menos uma solução.

$[2\pi, 3\pi]$ Neste intervalo $0 \le senx \le 1$ logo a equação tem pelo menos uma solução.

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ Neste intervalo $\frac{1}{2} \le senx \le 1$ logo a equação não tem solução.

2. Se $sen\alpha < 0$ então $\alpha \in 3^o Q \vee \alpha \in 4^o Q$

Se $tg\alpha > 0$ então $\alpha \in 1^o Q \vee \alpha \in 3^o Q$

Portanto, da conjunção das duas condições anteriores vem que $\alpha \in 3^o Q$.

Resolvendo a equação $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, em ordem a $\cos\alpha$:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$$

Como $\alpha \in 3^o Q$, sabemos que $\cos\alpha < 0$ logo $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$

3. Analisemos todas as afirmações:

$sen\alpha - sen(-\alpha) = sen\alpha + sen\alpha = 2sen\alpha$ que não é necessariamente zero.

$\cos\alpha - \cos(-\alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0$

$sen\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\alpha + sen\alpha = 2sen\alpha$

$sen\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = sen\alpha + sen\alpha = 2sen\alpha$

4. Se $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ e $\vec{a} \perp \vec{b}$, então $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ é igual a:

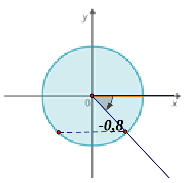
$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (2\vec{a}) \cdot \vec{a} + (2\vec{a}) \cdot (-\vec{b}) + (3\vec{b}) \cdot \vec{a} + (3\vec{b}) \cdot (-\vec{b}) = 2(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 3(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 3(\vec{b} \cdot \vec{b}) =$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 - 2 \times 1 \times 1 \times 0 + 3 \times 1 \times 1 \times 0 - 3 \times 1 \times 1 \times 1 = 2 - 3 = -1$$

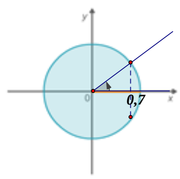
5. $sen\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = k\pi, \ k \in Z$

Grupo II

1. 1.1



1.2



2. 2.1.1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos 90^{o}=0$

2.1.2 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos\left(A\hat{C}B\right)$

Determinar $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$: $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2=6^2+10^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2=136 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\pm\sqrt{136}$

Como uma norma é sempre não negativa, $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\sqrt{136}$ Determinar $\cos\left(A\hat{C}B\right)$:

$\cos\left(A\hat{C}B\right)=\dfrac{10}{\sqrt{136}}$. Logo $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{136}\times 10\times\dfrac{10}{\sqrt{136}}=100$

2.2 O triângulo [AEC] é rectângulo portanto: $tg\left(A\hat{C}E\right)=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow tg\left(A\hat{C}E\right)=\dfrac{5}{\sqrt{136}}$,

logo $A\hat{C}E=tg^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{136}}\right) \Leftrightarrow A\hat{C}E\approx 23{,}2^{o}$

3. 3.1 $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,1)-(3,-2)=(-5,3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(-5,3)\cdot(2,3)=-5\times 2+3\times 3=-4$

3.2 Seja P um ponto qualquer da reta dada: $P(x,2x+1)$.

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x,2x+1)-(0,0)=(x,2x+1)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow (x,2x+1)\cdot(2,3)=0 \Leftrightarrow 2x+6x+3=0 \Leftrightarrow 8x=-3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{8}$

$P\left(-\dfrac{3}{8},2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)+1\right)$ $P\left(-\dfrac{3}{8},\dfrac{2}{8}\right)$

4.

4.1. $2senx+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow senx=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\pi+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$

Em $\left]-\pi,2\pi\right[$:

$$k=0 \quad x=-\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{4\pi}{3}$$

$$k=1 \quad x=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3} \quad \vee \quad x=\cancel{\frac{4\pi}{3}}+2\pi$$

$$k=2 \quad x=\cancel{\frac{5\pi}{3}}+2\pi \quad \vee \quad --------$$

$$k=-1 \quad x=\cancel{-\frac{\pi}{3}}-2\pi \quad \vee \quad x=\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

$$k=-1 \quad ------- \quad \vee \quad x=\cancel{-\frac{2\pi}{3}}-2\pi$$

As soluções neste intervalo são: $-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$

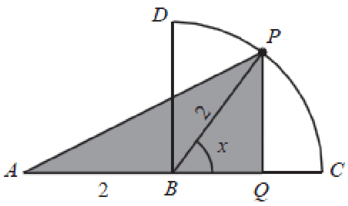
4.2. $\cos(2x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$

4.3. $tg^2 x - tgx = 0 \Leftrightarrow tgx(tgx - 1) = 0 \Leftrightarrow tgx = 0 \vee tgx = 1 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

5. 5.1 $Area_{[APQ]} = \frac{\overline{AQ} \times \overline{PQ}}{2}$

Cálculos auxiliares:



$senx = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2senx$

$\cos x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2senx$

$\overline{AQ} = 2 + 2\cos x$

$A(x) = \frac{(2 + 2\cos x) \times 2senx}{2} \Leftrightarrow A(x) = \frac{2 \times 2senx + 2\cos x \times 2senx}{2} \Leftrightarrow$

$A(x) = \frac{2 \times (2senx + \cos x \times 2senx)}{2} \Leftrightarrow A(x) = 2senx + 2senx.\cos x$ c.q.d.

5.2

5.1. Pela observação do gráfico da função vemos que há pelo menos dois objectos diferentes com a mesma imagem (os objectos a e b assinalados no eixo Ox). Sendo assim a função não é injetiva.

No contexto da situação apresentada isto significa que há, pelo menos, dois valores de x para quais a área do triângulo [AQP] é a mesma.