

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

**Curso Científico-Humanístico
de Artes Visuais**

Duração da prova: 150 minutos
2006

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 10.

A prova inclui um formulário (pág. 11).

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

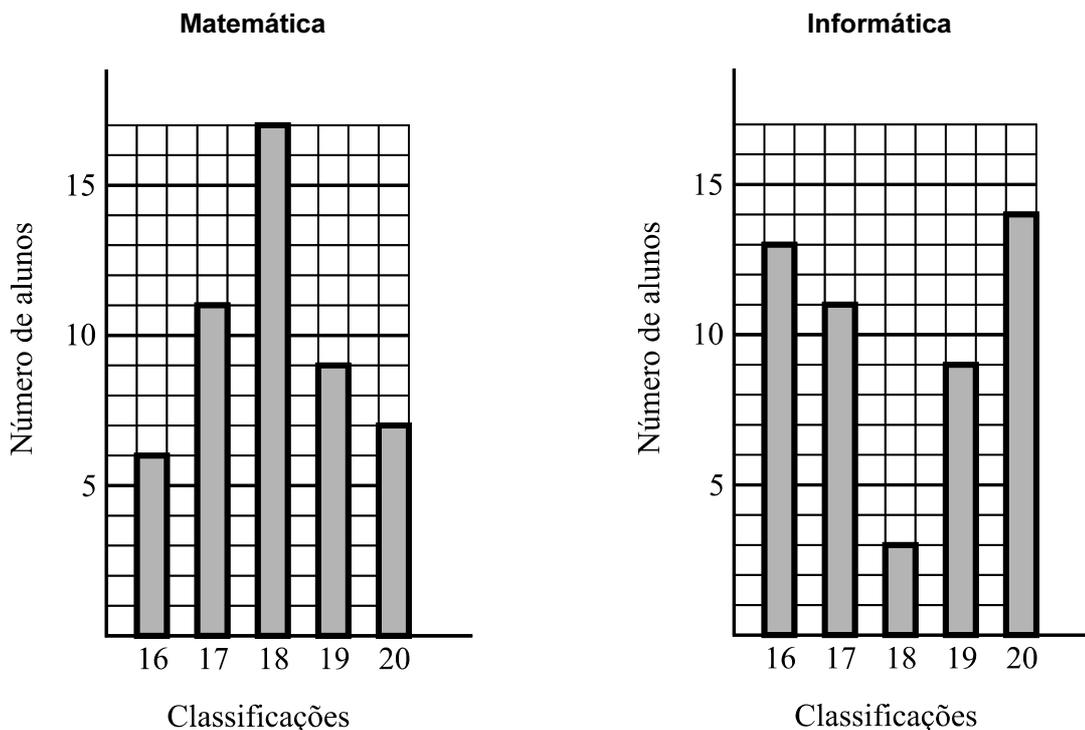
Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Num certo concelho do nosso país, uma empresa de informática vai facultar um estágio, durante as férias do Verão, aos alunos do 11.º ano, das escolas desse concelho, que tenham obtido classificação final superior a 15 valores, quer a Matemática, quer a Informática.

As classificações finais nas disciplinas de Matemática e de Informática obtidas pelos 50 alunos desse concelho que satisfaziam as condições requeridas foram tratadas estatisticamente.

Desse tratamento resultaram os gráficos apresentados a seguir.



- 1.1. Depois de ter calculado, para cada uma das disciplinas, a média e o desvio padrão das classificações, a Ângela comentou: «As médias das classificações a Matemática e a Informática são iguais, mas o mesmo não se passa com os desvios padrão».

1.1.1. Conclua que a Ângela tem razão na sua afirmação, calculando, para cada uma das disciplinas, a média e o desvio padrão das classificações.

1.1.2. O Pedro, que estava a tratar os dados em conjunto com a Ângela, comentou: «Quando me disseste que as médias eram iguais, eu, observando os gráficos, concluí logo que os desvios padrão eram diferentes».

Tendo em conta que o desvio padrão mede a variabilidade dos dados relativamente à média, explique como poderá o Pedro ter chegado àquela conclusão.

- 1.2. Sabe-se que, dos alunos que obtiveram 20 a Informática, metade obteve também 20 a Matemática.

A empresa vai sortear um prémio entre os alunos que obtiveram classificação igual ou superior a 19, na disciplina de Matemática.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a um aluno que obteve 20 nas duas disciplinas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. A Ana e a Fátima têm de ler, para a disciplina de Português, um livro com 255 páginas numeradas, da página 1 (primeira página do livro) à página 255 (última página do livro).

2.1. As duas raparigas começam a ler o livro no mesmo dia, na página 1.

A Ana lê uma página no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê o dobro do número de páginas do dia anterior.

A Fátima lê três páginas no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê mais duas páginas do que no dia anterior.

2.1.1. Verifique que, ao fim de n dias, a Ana já leu $2^n - 1$ páginas e a Fátima já leu $n^2 + 2n$ páginas.

2.1.2. Admita que a Ana acaba de ler o livro no dia 18 de Abril. Em que dia acaba a Fátima de ler o livro? Justifique a sua resposta.

2.2. Escolhida, ao acaso, uma das 255 páginas numeradas do mesmo livro, qual é a probabilidade de o número dessa página ter, pelo menos, dois algarismos e começar por 2? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3. Admita que, em condições ambientais normais, o número aproximado de aves de uma certa população, t anos após um determinado instante inicial, é dado por

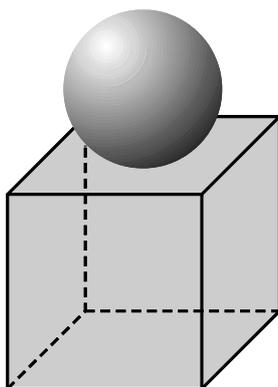
$$N(t) = \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-0,2t}} \quad (t \geq 0 \text{ e } A \text{ constante positiva})$$

3.1. Verifique que A é o número de aves existentes no instante inicial.

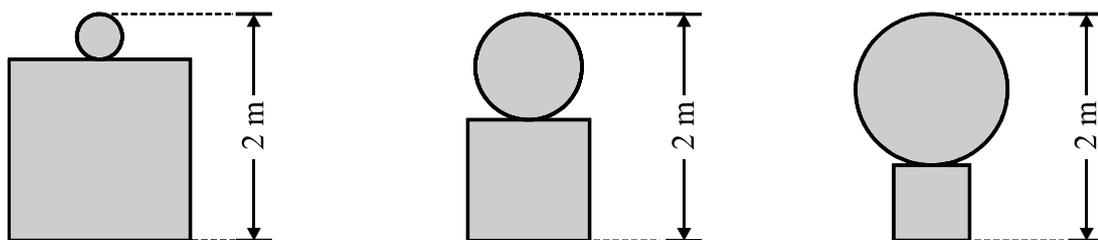
3.2. Ao longo dos cinco anos que se seguiram ao instante inicial, a população cresceu em condições ambientais normais. Nasceram 80 aves e morreram 57, não tendo entrado nem saído mais aves da população.

Estime o número de aves que havia nessa população, no instante inicial, sabendo que esse número era inferior a 25.

4. Na figura, está representado um projecto de uma escultura em cimento para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo.



Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros. Apresentam-se, a seguir, as vistas de frente de três possíveis concretizações desse projecto.



- 4.1. Designemos por x o raio da esfera (em metros).
- 4.1.1. Indique, na forma de intervalo de números reais, o conjunto dos valores que a variável x pode assumir.
- 4.1.2. Mostre que o volume total, V , em metros cúbicos, da escultura é dado, em função de x , por
- $$V(x) = \frac{4\pi - 24}{3} x^3 + 24x^2 - 24x + 8$$
- 4.1.3. Determine o raio da esfera e a aresta do cubo de modo que o volume total da escultura seja mínimo. Apresente os resultados em metros, arredondados às centésimas.
- 4.2. Admita agora que o raio da esfera é metade da aresta do cubo.

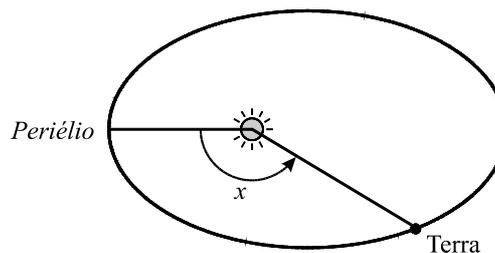
Pretende-se pintar toda a superfície da escultura, excepto, naturalmente, a face do cubo que está assente no chão.

Cada litro da tinta que vai ser utilizada permite pintar uma superfície de $2,5 \text{ m}^2$.

Admitindo que esta tinta só é vendida em latas de 1 litro, quantas latas será necessário comprar?

5. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$).

Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x , por

$$d = 149,6 (1 - 0,0167 \cos x)$$

- 5.1. Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

- 5.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x ;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

- 5.2.1. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

- 5.2.2. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora.

6. Para estudar a Lei do Arrefecimento de um Corpo, a Joana aqueceu uma pequena quantidade de água. Em seguida, deixou-a a arrefecer, medindo a temperatura em vários instantes, a partir de um certo instante inicial.

De acordo com a referida lei, em cada instante, a taxa de variação da temperatura é directamente proporcional à diferença entre a temperatura da água, nesse instante, e a temperatura ambiente, que se considera constante.

Tem-se, portanto, que

$$T'(t) = k [T(t) - A]$$

em que:

- $T(t)$ designa a temperatura da água, no instante t ;
- $T'(t)$ designa a taxa de variação da temperatura, nesse mesmo instante;
- A designa a temperatura ambiente;
- k é a constante de proporcionalidade.

Admita que, durante a experiência, o tempo foi medido em minutos e a temperatura em graus Celsius.

Na tabela seguinte, estão valores da temperatura da água, registados de 0,5 em 0,5 minutos, com início no instante $t = 2$.

t	2	2,5	3	3,5
$T(t)$	85,0	83,8	82,6	81,5

Tendo em conta os dados desta tabela e sabendo que a temperatura ambiente, no local da experiência, era de 25 graus Celsius, estime o valor de k .
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Determine a taxa de variação média da temperatura da água, nos intervalos $[2; 3,5]$, $[2; 3]$ e $[2; 2,5]$.*
- *Tendo em conta os valores obtidos, estime a taxa de variação instantânea da temperatura da água, no instante $t = 2$.*
- *Tendo em conta a fórmula dada acima, estime o valor de k .*

FIM

COTAÇÕES

1.	25
1.1.	15
1.1.1.	8
1.1.2.	7
1.2.	10
2.	32
2.1.	22
2.1.1.	12
2.1.2.	10
2.2.	10
3.	30
3.1.	15
3.2.	15
4.	43
4.1.	30
4.1.1.	5
4.1.2.	15
4.1.3.	10
4.2.	13
5.	45
5.1.	15
5.2.	30
5.2.1.	15
5.2.2.	15
6.	25
TOTAL	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

**Curso Científico-Humanístico
de Artes Visuais**

Duração da prova: 150 minutos
2006

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

COTAÇÕES

1.	25
1.1.	15
1.1.1.	8
1.1.2.	7
1.2.	10
2.	32
2.1.	22
2.1.1.	12
2.1.2.	10
2.2.	10
3.	30
3.1.	15
3.2.	15
4.	43
4.1.	30
4.1.1.	5
4.1.2.	15
4.1.3.	10
4.2.	13
5.	45
5.1.	15
5.2.	30
5.2.1.	15
5.2.2.	15
6.	25
TOTAL	200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. A cotação a atribuir a cada item deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
 - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
 - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9 e 10 destes critérios gerais, e das penalizações previstas nos pontos 11 e 12 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.
6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
 - 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.

Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.

Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser penalizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser penalizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Existem, por vezes, etapas em que está previsto o recurso à calculadora. Nessas etapas, os critérios específicos subdividem-se em: «Explicação do método utilizado» e «Apresentação do(s) valor(es)».

7.1. Explicação do método utilizado:

De acordo com as instruções gerais para a realização da prova, o examinando deve apresentar todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora. Esta apresentação deve ser cotada de acordo com o critério que se segue, no qual, para cada nível de desempenho, é indicada uma percentagem. Esta percentagem deve ser aplicada sobre a cotação prevista para a explicação do método utilizado, e o valor obtido deve ser arredondado às unidades (por excesso, se a mantissa do número a arredondar for 0,5 ou superior).

Apresentação correcta e completa de todos os elementos relevantes..... 100%

Apresentação correcta, mas com ausência de alguns elementos relevantes

ou

Apresentação completa, mas com algumas incorrecções (por exemplo, não respeitar o domínio de uma função) 60%

Apresentação incompleta e com algumas incorrecções 20%

Ausência de explicação ou simples referências do tipo «Vi na calculadora»..... 0%

7.2. Apresentação do(s) valor(es):

Para cada valor que o examinando deve apresentar, os critérios específicos podem indicar um intervalo admissível. O valor apresentado pelo examinando pode pertencer, ou não, a esse intervalo.

- Se o valor pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a cotação máxima prevista para essa apresentação, a menos de qualquer penalização prevista nos critérios específicos, por desrespeito relativo ao número de casas decimais com que o resultado deve ser apresentado.
- Se o valor não pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.

8. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, o examinando não deve ser penalizado se não indicar a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não deve ser penalizado).
9. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.
10. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
11. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a esse item. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.
12. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as penalizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução -2 pontos

Critérios específicos

1.1.1. 8

Determinar a média e o desvio padrão das classificações na disciplina de Matemática 4

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)2

$\bar{x} = 18$ 1

$\sigma \approx 1,2$ 1

Determinar a média e o desvio padrão das classificações na disciplina de Informática 4

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)2

$\bar{x} = 18$ 1

$\sigma \approx 1,6$ 1

1.1.2. 7

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Observando os dois gráficos, o Pedro verificou que, na disciplina de Matemática, as classificações estão mais concentradas em torno da média do que na disciplina de Informática. O Pedro concluiu, assim, que os desvios padrão eram diferentes.

1.2. 10

Concluir que o número de casos favoráveis é 7 4

Concluir que o número de casos possíveis é 164

Determinar a probabilidade pedida $\left(\frac{7}{16}\right)$ (ver nota).....2

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir à sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1.1. 12

Determinar o número de páginas que a Ana leu ao fim de n dias..... 6

Reconhecer que a situação se traduz por uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 12

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Ana leu ao fim de n dias $\left(1 \times \frac{1-2^n}{1-2} \right)$ 3

Simplificar a expressão anterior..... 1

Determinar o número de páginas que a Fátima leu ao fim de n dias6

Reconhecer que a situação se traduz por uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 32

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Fátima leu no n -ésimo dia $(3 + (n - 1) \times 2)$ 1

$3 + (n - 1) \times 2 = 1 + 2n$ 1

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Fátima leu ao fim de n dias $\left(\frac{3+1+2n}{2} \times n \right)$ 1

Simplificar a expressão anterior..... 1

2.1.2. 10

Determinar o número de dias que a Ana demora a ler o livro 4

Equacionar o problema $(2^n - 1 = 255)$ 2

$n = 8$ 2

Determinar o número de dias que a Fátima demora a ler o livro 4

Equacionar o problema $(n^2 + 2n = 255)$ 2

$n = 15$ 2

Resposta à questão colocada (25 de Abril) 2

2.2. 10

Concluir que o número de casos favoráveis é $10 + 56$ (**ver nota**)..... 6

Escrever a fracção $\frac{66}{255}$ 2

Apresentar a probabilidade pedida na forma de percentagem (26 %) 2

Nota:

Se o examinando considerar que o número de casos favoráveis é $9 + 55$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser de 4 pontos.

3.1. 15

Substituir, na expressão $N(t)$, a variável t por 0 7

$N(0) = \frac{125 A}{A+(125-A)}$ 3

$N(0) = \frac{125 A}{125}$ 3

$N(0) = A$ 2

3.2. 15

Equacionar o problema $\left(\frac{125 A}{A+(125-A)e^{-1}} = A + 23 \right)$ 8

Resolver a equação 7

Explicação do método (ver critério geral 7.1.) 4

$A \approx 21$ (**ver nota**) 3

Nota:

Se o examinando apresentar a resposta $A \approx 20$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.

4.1.1. 5

A cotação a atribuir à resposta do examinando deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Apresentar o intervalo correcto $]0,1[$	5
Apresentar um dos seguintes intervalos: $[0,1]$ ou $[0,1[$ ou $]0,1]$	3
Apresentar o intervalo $]0,2[$	1
Outras situações	0

4.1.2. 15

Volume da esfera $= \frac{4}{3} \pi x^3$	1
Aresta do cubo $= 2 - 2x$	2
Volume do cubo $= (2 - 2x)^3$	1
$(2 - 2x)^3 = (2 - 2x)^2 \times (2 - 2x)$	3
$(2 - 2x)^2 = 4 - 8x + 4x^2$	3
$(4 - 8x + 4x^2) \times (2 - 2x) = 8 - 24x + 24x^2 - 8x^3$	3
$V(x) = \frac{4}{3} \pi x^3 + 8 - 24x + 24x^2 - 8x^3$	1
Conclusão	1

4.1.3. 10

Determinar o valor de x (raio da esfera) para o qual o volume total da escultura é mínimo $(0,58)$ (ver nota)	8
Determinar a aresta do cubo correspondente $(0,84)$	2

Nota:

O examinando pode encontrar o minimizante de V graficamente ou analiticamente.

Se o examinando utilizar a via gráfica, com recurso à calculadora, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)	5
Indicar o minimizante	3
O intervalo admissível para o minimizante	
é $[0,57; 0,59]$ (ver critério geral 7.2.)	

Se o examinando utilizar a via analítica, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Determinar a taxa de variação da função	4
Determinar o minimizante	4

4.2. 13

Concluir que o raio da esfera é $\frac{1}{2}$ 2

Concluir que a aresta do cubo é 1 2

Determinar a área total da escultura, excluindo a face do cubo que está assente no chão 6

 Área da superfície esférica (π) 2

 Área de uma face do cubo (1) 1

 Área de cinco faces (5)2

 Área total ($5 + \pi$)1

Responder à questão colocada 3

$\frac{5 + \pi}{2,5} \approx 3,257$ 1

 Conclusão (4 latas)2

5.1. 15

Se o examinando utilizar a via analítica para resolver esta questão, a cotação deve ser repartida da seguinte forma:

Concluir que π é maximizante de d (**ver nota**).....4

Determinar a distância máxima (152,1)4

Concluir que 0 é minimizante de d (**ver nota**) 3

Determinar a distância mínima (147,1)4

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 3

$0,0167 \geq -0,0167 \cos x \geq -0,0167$ 3

$1,0167 \geq 1 - 0,0167 \cos x \geq 0,9833$ 3

$152,1 \geq 149,6(1 - 0,0167 \cos x) \geq 147,1$ 3

Conclusão 3

Se o examinando utilizar a via gráfica, com recurso à calculadora, a cotação deve ser repartida da seguinte forma:

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)5

Indicar o máximo..... 5

 O intervalo admissível é [152; 152,2]
 (ver critério geral 7.2.)

Indicar o mínimo..... 5

 O intervalo admissível é [147; 147,2]
 (ver critério geral 7.2.)

Nota:

Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da taxa de variação e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

5.2.1. 15

Mostrar que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$ 9

Substituir x por π 2

Obter a igualdade $\frac{2\pi t}{T} = \pi$ 3

Mostrar que $\frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$ 4

Interpretar o resultado6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.») 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «Quando o $x = \pi$, demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.»; «Quando $x = \pi$ percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.») 3

Outras situações (exemplo: «O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.») 0

5.2.2. 15

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (**ver nota**)2

Escrever a equação $\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \operatorname{sen} x$ 4

Resolver a equação 6

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)3

Valor de x3

O intervalo admissível é $[0,7162; 0,7163]$
(ver critério geral 7.2.)

Determinar a distância pedida 3

Substituir, na expressão $149,6(1 - 0,0167 \cos x)$,
 x pelo valor encontrado2

Resultado correctamente arredondado 1

Nota:

A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Número de dias correcto (41)2

Número de dias igual a 40 ou a 421

Outras situações0

6. 25

Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 3,5]$ ($-2,3$)3

Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 3]$ ($-2,4$) 3

Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 2,5]$ ($-2,4$)3

$T'(2) \approx -2,4$ 4

Equacionar o problema ($-2,4 = k(85 - 25)$) 9

Determinar o valor de k ($-0,04$).....3