gave
gabinete de avaliação educacional

Ministério da Educação

TESTE INTERMÉDIO

11.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos** 19/Maio/2006

MATEMÁTICA A

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

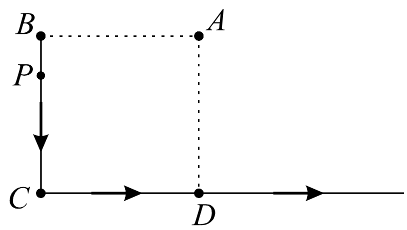
O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura estão representados:

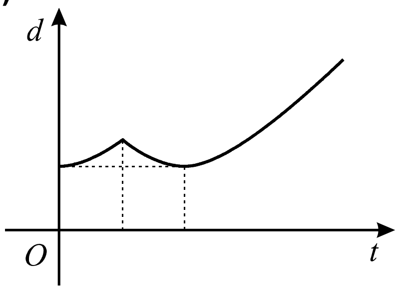
- um quadrado $[ABCD]$
- uma semi-recta $\dot{C}D$



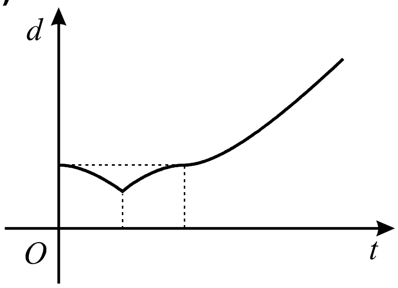
Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento $[BC]$ e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$).

Qual dos gráficos seguintes dá a distância d, do ponto P ao ponto A, em função do tempo t, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?

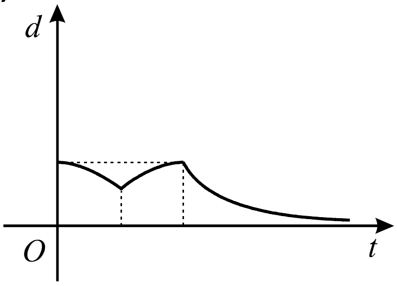
(A)



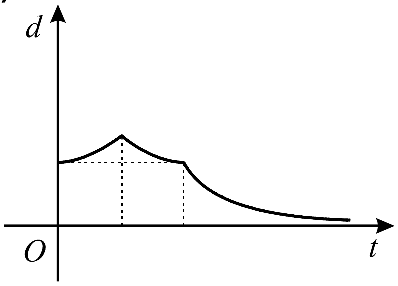
(B)



(C)



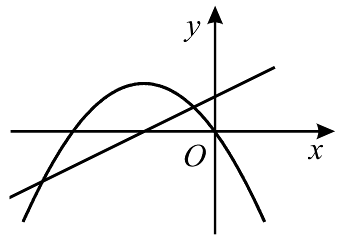
(D)



2. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática f;
- parte do gráfico de uma função afim g.

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?



(A) $]-\infty, -4[\ \cup\ [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4]\ \cup\ ]-2, 0]$

(C) $]-4, -2]\ \cup\ ]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\ \cup\ [0, +\infty[$

3. Na figura 1 está representada graficamente a função f.
Na figura 2 está representada graficamente a função g.

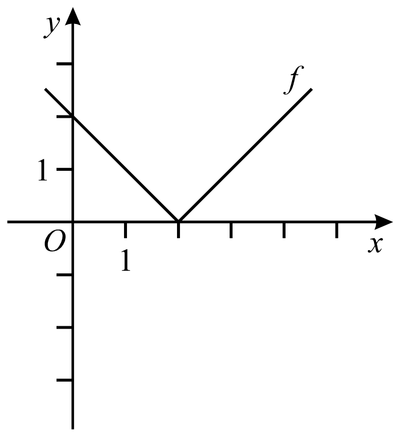


Figura 1

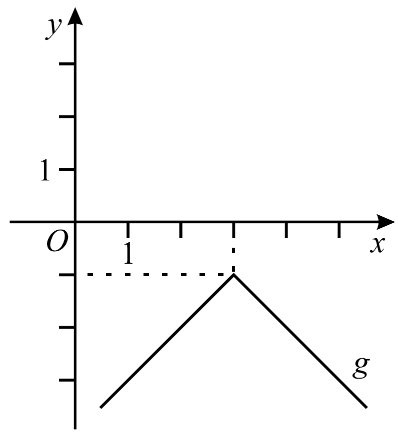


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = -f(x+1) - 1$ **(B)** $g(x) = f(x-1) + 1$

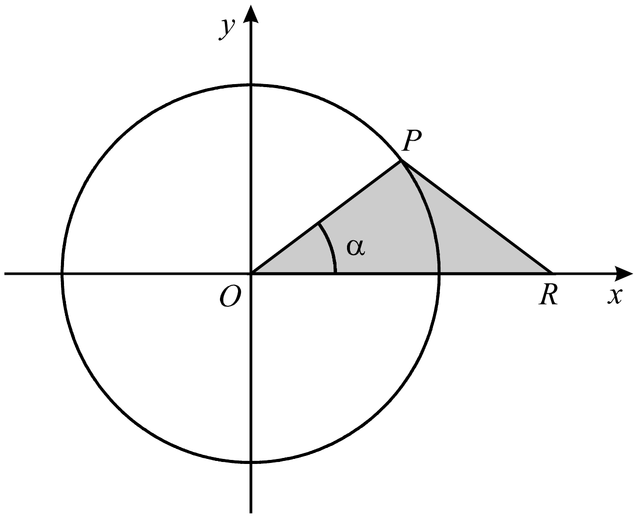
(C) $g(x) = f(x+1) - 1$ **(D)** $g(x) = -f(x-1) - 1$

4. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1, 5]$.
Qual é o contradomínio de f?

(A) $]-\infty, f(1)]$ **(B)** $[f(5), +\infty[$

(C) $[f(3), +\infty[$ **(D)** $]-\infty, f(3)]$

5. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$.



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo $[OPR]$ é sempre isósceles.
Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a **área** do triângulo $[OPR]$, em função de α?

(A) $\operatorname{sen}\alpha \, . \cos\alpha$

(B) $2 \, . \operatorname{sen}\alpha \, . \cos\alpha$

(C) $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\alpha \, . \cos\alpha}{2}$

(D) $\dfrac{(1 + \cos\alpha) \, . \operatorname{sen}\alpha}{2}$

6. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Qual das expressões seguintes dá o valor de $\operatorname{sen}\alpha$?

(A) $\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

(B) $-\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

(C) $\sqrt{1 + \cos^2\alpha}$

(D) $-\sqrt{1 + \cos^2\alpha}$

7. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{5}$
Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\dfrac{1}{5}$?

(A) $\pi + \beta$

(B) $\dfrac{\pi}{2} + \beta$

(C) $-\beta$

(D) $\dfrac{\pi}{2} - \beta$

Grupo II

> Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $f(x) = 2 + \dfrac{1}{1-x}$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x) \leq -1$$

Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

1.2. O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

2. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares.

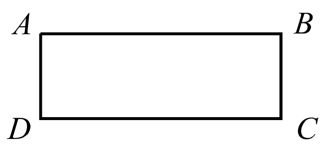
Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.

Sabe-se que
- o custo de produção de um hectare de trigo é $1\,500$ euros,
- o custo de produção de um hectare de milho é $1\,000$ euros,

e que
- cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros,
- cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.

Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que $200\,000$ euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo que tenha um lucro máximo?

3. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.

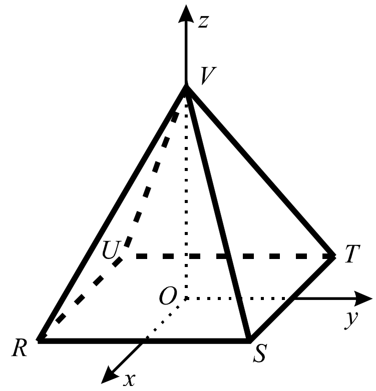


Mostre que o produto escalar $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^{\,2}$

4. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular.

Sabe-se que:

- a base $[RSTU]$ é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta $[RS]$ é paralela ao eixo Oy;
- o vértice V tem coordenadas $(0, 0, 2)$.

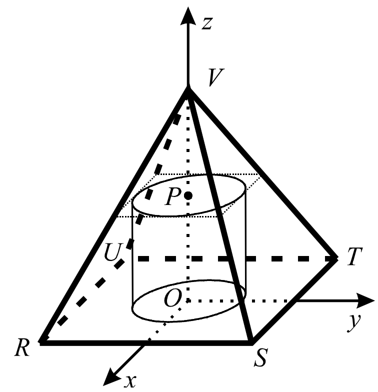


4.1. Mostre que a recta definida pela condição $x = 0 \wedge y = 2z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

4.2. Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V.

Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:

- a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy;
- a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P.



Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z.

4.2.1. Justifique que o domínio da função f é o intervalo $]0, 2[$ e que

$$f(z) = \pi \left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z \right)$$

4.2.2. Considere o seguinte problema:
Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide?
Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a **graficamente**.
Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas.
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 32
  1.1. 20
  1.2. 12

2. 25

3. 20

4. 60
  4.1. 20
  4.2. 40
    4.2.1. 25
    4.2.2. 15

TOTAL 200